MATEMATIKA

ÁTMENŐ

A 2016-OS ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEINEK MEGFELELŐ OKTATÁSI SEGÉDANYAG

A PUSKÁZÁS CSALÁSNAK MINŐSÜL.
A PUSKÁK VIZSGÁN TÖRTÉNŐ HASZNÁLATÁT NEM AJÁNLJUK!

Tartalomjegyzék

1. Műveletek valós számokkal 1–8
1.1. Gyökök és hatványozás 1–3
1.1.1. Hatványozás 1
1.1.2. Gyökök 1–3
1.2. Azonosságok 3–4
1.3. Egyenlőtlenségek..5–8

2. Függvények 8–12
2.1. A függvény fogalma 8–9
2.2. Injektív, szürjektív függvények 9–10
2.3. Függvények összetétele 11
2.4. Inverz függvény..11–12

3. Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek 13–16
3.1. Elsőfokú egyenletek 13–15
3.2. Valós szám abszolút értéke..15–16

4. Másodfokú függvény 16–18

5. Komplex számok..19–26
5.1. Algebrai alak 19–20
5.2. Az i hatványai..20
5.3. A z konjugáltja 20–21
5.4. Komplex szám abszolút értéke..21–22
5.5. Trigonometriai alak 23–24
5.6. Moivre-képlet 24–25
5.7. Exponenciális alak..25
5.8. Binom egyenlet..26

6. Haladványok 26–30
6.1. Számtani sorozatok..26–27
6.2. Mértani sorozatok..28–30
6.2.1. Egy alkalmazás..29–30

7. Logaritmusok..30–35
7.1. Alap logaritmikus és exponenciális egyenletek 34
7.2. Alap logaritmikus és exponenciális egyenlőtlenségek......34–35

8. Mértan..35–66

8.1. Vektorok....35–49
8.1.1. Nevezetes helyzetvektorokkal kapcsolatos tételek ...44–49
8.2. Analitikus mértan térben, síkban....49–55
8.2.1. Egy pont és két nem párhuzamos irány által meghatározott sík egyenlete....50–51
8.2.2. Három nem kollineáris pont által meghatározott sík egyenlete..52–53
8.2.3. A sík tengelymetszetes egyenlete....53
8.2.4. A sík általános egyenlete....53–54
8.2.5. A koordináta-rendszerhez viszonyítva sajátos helyzetű síkok egyenletei....54–55

8.3. Egyenesek egyenletei 56–61
8.3.1. Két különböző pont által meghatározott egyenes egyenlete....57
8.3.2. Az egyenes általános egyenlete....58
8.3.3. Síkbeli egyenesek egyenletei....58–59
8.3.4. Két különböző pont által meghatározott egyenes egyenlete....60
8.3.5. Két térbeli egyenes szöge....60–61
8.4. Pont távolsága egyenestől (síkban)....61–62
8.4.1. Szögfelezők egyenletei (síkban)....62
8.5. Pont távolsága egyenestől (térben)....62–63
8.6. A kör....64
8.7. Az ellipszis....64–66

9. A hiperbola....66–70
9.1. Parabola....67–68
9.2. Skaláris szorzat további alkalmazásai....69–70

10. A matematikai indukció módszere....70–72
10.1. A Peano-féle axiómák....70
10.2. A matematikai indukció módszere....70–71
10.3. A matematikai indukció módszerének egy változata....71–72

11. Kombinatorika....72–77
11.1. Permutációk....72
11.2. Variációk....73
11.3. Kombinációk....73–74
11.4. Newton binomiális képlete....74–76
11.5. Azonos hatványösszegek....77

12. Polinomok....78–83

12.1. Egy polinom algebrai alakja 78
12.2. Polinomok oszthatósága 79–80
12.3. Irreducibilis polinomok 80
12.4. Polinomok gyökei..81
12.5. Algebrai egyenletek..81–82
12.6. Polinomok melyek együtthatói R, Q, Z-ből vannak ..82–83

13. Permutációk, mátrixok és determinánsok 83–94
13.1. Permutációk...83–85
13.2. Mátrixok..85–86
13.3. Műveletek mátrixokkal...86–88
13.4. Determinánsok...88–90
13.5. Mátrix inverse..90–92
13.5.1. A mátrix nyoma, Tr(A)...91–92
13.6. További képletek 92–94

14. Lineáris rendszerek 94–95
14.1. Jelölések 94–95
14.2. Összeférhetőség...95

15. Trigonometria 96–104
15.1. Trigonometriai képletek 96–100
15.2. Trigonometria alkalmazása a mértanban 100–104

16. Matematikai analízis 105–132
16.1. Rekurziók 105–106
16.1.1. Elsőrendű rekurziók...105
16.1.2. Másodrendű rekurziók...105–106
16.2. Sorozatok határértéke 106–114
16.2.1. Általános határértékek, konvergencia kritériumok.......108–114
16.3. Függvényhatárértékek 114–115
16.3.1. Műveletek függvényhatárértékekkel...............................115
16.4. Alaphatárértékek...116–118
16.5. Függvények folytonossága 119–122
16.5.1. Folytonosságra vonatkozó tételek..............................120–122
16.6. Deriválható függvények 123–131
16.6.1. Derivált értelmezése egy pontban...............................123–124
16.6.2. Deriválási szabályok..124–125
16.6.3. Néhány függvény deriváltja..125–127

16.6.4. Összetett függvény deriváltja 127–129
16.6.5. Magasabbrendű deriváltak...................................129–130
16.6.6. Deriválható függvények tulajdonságai 130–131
16.7. Integrálok 131–132
16.7.1. Határozatlan integrálok.......................................131–132

17. Függvények primitiválhatósága...........................132–166
17.1. Általános integrálási szabályok 132
17.2. Racionális függvények primitívje........................132–137
17.3. Integrálok amelyek tartalmazzák az r=(x2+a2)1/2 137–141
17.4. Integrálok amelyek tartalmazzák az s=(x2–a2)1/2 142–144
17.5. Integrálok amelyek tartalmazzák a $t=(a^2-x^2)^{1/2}$......144–145
17.6. Integrálok amelyek tartalmazzák az $R=(ax^2+bx+c)^{1/2}$ 145–147
17.7. Trigonometrikus integrálok, amelyek csak a sin-t tartalmazzák 148–150
17.8. Trigonometrikus integrálok, amelyek csak a cos-t tartalmazzák 150–152
17.9. Trigonometrikus integrálok, amelyek csak a tan-t tartalmazzák 153
17.10. Trigonometrikus integrálok, amelyek tartalmazzák a sin-t és cos-t..154–155
17.11. Logaritmikus integrálok 155-163
17.11.1. A határozott integrál tulajdonságai 157–158
17.11.2. Integrálok additivitása intervallumokon 158
17.11.3. Fundamentális tétel (Alaptétel)..........................159–160
17.11.4. Egyenlőtlenségek...160–163
17.12. Más tételek 163–166
17.12.1. Primitiválható függvények................................164–165
17.12.2. Integrálható függvények 165–166

18. Algebrai struktúrák..166–176
18.1. Csoportok 166–170
18.1.1. Tulajdonságok és nevezetes tételek 167–170
18.2. Monoidok 170–171
18.3. Gyűrűk...171–173
18.4. Testek 173–175
18.5. Vektorterek..175–176

1 Műveletek valós számokkal

1.1 Gyökök és hatványozás

1.1.1 Hatványozás

1. $a^{m \cdot n} = a^m \cdot a^n$
2. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$
4. $a^m : b^m = (a : b)^m$
5. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
6. $(a^m)^n = a^{mn}$.

A valós számok hatványai kiterjeszthetőek racionális, irracionális, illetve valós hatványokkal is sorok segítségével. Ezek a hatványok is rendelkeznek azokkal a tulajdonságokkal amivel a természetes kitevöjű hayványok.

1.1.2 Gyökök

Az alábbi képletekben értelemszerűen az n, $m \geq 2$, valamint az a, b, c számok olyan valós számok, amelyekre az adott kifejezéseknek van értelme:

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $a > 0$;

2. $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}}$;

3. $(\sqrt[n]{a})^n = a$;

4. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;

5. $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^n = \frac{1}{a}$;

6. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$;

7. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$;

8. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$;

9. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^{n-m}}$;

10. $\sqrt[n]{a^{nm}} = a^m$;

11. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$;

12. $\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p}$;

13. $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{pn} \cdot b^{qm}}$;

14. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$;

15. $\sqrt{a^2} = |a|$;

16. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$;

17. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ ahol a $c^2 = a^2 - b$ egynlőségből határozzuk meg a c értékét.

Tekintsük a következő példát a 17 képletre. Hozzuk egyszerűbb alakra $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ kifejezést. Ebben az esetben nehéz dolgunk van és nem igazán tudunk vele mit kezdeni, ezért folyamodunk a fenti képlethez: $c^2 = 3^2 - 8 = 1$, tehát

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{3 - 1}{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

1.2 Azonosságok

Bármely $x, y, z, t, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén:

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
2. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2$
3. $a^b - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
6. $a^b + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$
7. $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

8. $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})$

9. $a^5 - b^5 = (a+b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$

10. $a^6 + b^6 = (a^3 - 2ab^2)^2 + (b^3 - 2a^2 b)^2$

11. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

12. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^2 n - a^{2n-1} b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$

13. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

14. $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right)^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i x_j - a_j x_i)^2$

15. (Hermite)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] = [nx]$$

12 Polinomok

12.1 Egy polinom algebrai alakja

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom a következő alakba írható $f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, ahol n a polinom fokszáma, a_0 szabad tag és a_n a főegyüttható.**A polinomhoz rendelt függvényt** a következőképpen értelmezzük: Legyen $f \in \mathbb{C}[x]$ és $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$; $f(\alpha)$ az f értéke α-ban.

Maradékos osztás tétele: Legyenek $\forall f, g \in \mathbb{C}[x]$, $g \neq 0$ ekkor léteznek olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$ polinomok, amelyek egyértelműen meghatározottak, és $f = g \cdot q + r$, $degr< degg$.

Egy polinom osztása (x-a)-al Az $f \in \mathbb{C}[x]$, $f \neq 0$ polinom osztási maradéka az $x - a$ polinommal pontosan $f(a)$. **Horner séma:** Megszeretnénk határozni a hányadost $q = b_0 X^{n-1} + b_1 X^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ amelyet az $f = a_0 X^n + a_a X^{n-1} + \ldots a_n$ az $X - a$ polinommal való osztása során kapjuk;

$$\begin{array}{c|ccc} & a_0 & a_1 & \cdots \\ a & b_0 = a_0 & b_1 = ab_0 + a_1 & \cdots \end{array}$$

12.2 Polinomok oszthatósága

Értelmezés 12.1. *Legyen* $f,\ g \in \mathbb{C}[x]$*, azt mondjuk, hogy* g ***osztja*** f***-t*** *és a következőképpen jelöljük:* $g\,|\,f$*, ha* $\exists q \in \mathbb{C}[x]$ *úgy, hogy* $f = gq$.

Tétel 12.1. *A polinom oszthatósági tulajdonságai a következők:*

1. $a\,|\,f,\ \forall a \in \mathbb{C}^*,\ \forall f \in \mathbb{C}[x]$;
2. $g\,|\,f$ *és* $f \neq 0 \Leftrightarrow r = 0$;
3. $g\,|\,f$ *és* $f \neq 0 \Rightarrow$ *grad* $f \geq$ *grad* g;
4. $f\,|\,f$ *(reflexivitás);*
5. $a \in \mathbb{C}^* \Rightarrow f\,|\,f$;
6. $f\,|\,g$ *şi* $g\,|\,h \Rightarrow f\,|\,h$ *(tranzitivitás)'*
7. $f\,|\,g,\ g\,|\,f \Rightarrow \exists a \in \mathbb{C}^*$ *cu* $f = ag$

Értelmezés 12.2. *Egy* d *polinomot az* f *és* g *legnagyob közös osztójának nevezzük ha:*
1.) $d\,|\,f,\ d\,|\,g$
2.) $d'\,|\,f,\ d'\,|\,g \Rightarrow d'\,|\,d$ *és a következőképpen jelöljük* $d = (f,\ g)$.

Értelmezés 12.3. *Ha* $d = 1$ *akkor* $f,\ g$ *relatív primeknek nevezzük.*

Értelmezés 12.4. *Az* m *polinomot az* $f,\ g$ *polinomok legkisebb közös többszörösének nevezzük ha:*
1.) $f\,|\,m,\ g\,|\,m$;
2.) $f\,|\,m',\ g\,|\,m' \Rightarrow m\,|\,m'$.

Tétel 12.2. *Ha* $d = (f, g)$ *akkor* $m = \dfrac{f \cdot g}{d}$.

12.3 Irreducibilis polinomok

Egy n-edfokú polinomra akkor mondjuk, hogy irreducibilis, ha az nem bontható fel két, n-nél kisebb fokú polinom szorzatára. Nevezhetjük őket a polinomok között prímeknek. Fontos azonban, hogy mely számok teste felett értjük az irreducibilitást, ugyanis például az $x^2 + 2$ polinom a valós számok teste felett irreducibilis, a komplexé felett pedig nem.

Tétel 12.3. *Állítások irreducibilis polinomokra:*

1. *Minden elsőfokú polinom irreducibilis.*
2. *Ha* $f(x)$ *irreducibilis, akkor tetszőleges* $c \neq 0$ *konstans esetén* $cf(x)$ *is az.*
3. *Ha* $p(x) | f(x)g(x)$ *és* $p(x)$ *irreducibilis, akkor* $p(x) | f(x)$ *vagy* $p(x) | g(x)$.
4. *Minden* $f(x)$ *polinomhoz megadhatók konstans szorzó erejéig egyértelműen olyan*

$$p_1(x), p_2(x), \ldots p_n(x)$$

polinomok, hogy

$$f(x) = p_1(x)p_2(x) \ldots p_n(x)$$

teljesül.

Tétel 18.19. *Létezik egy* $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}$ *egy szürjektív morfizmus* $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ *és* $(\mathbb{Q}, +)$ *között.*

Tétel 18.20. *Legyen* p *egy prím és legyen* $|G| = p^2$*. Ekkor* G *Abel csoport.*

Tétel 18.21. *Ha* $G \cong \mathbb{Z}_n$*, akkor* G *egy* n*0ed rendű véges csoport.*

Tétel 18.22. *Ha* $|G| = p^3$*, akkor* $x^p \in Z(G)$*.*

18.2 Monoidok

Legyen $(M, *)$ struktúra,

$$M \times M \to M, \ (x, y) \to x * y,$$

M nem üres;
A monoid axiómái:
M1. $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$ (asszociativitás);

M2. $\exists e \in M$ úgy, hogy $x * e = e * x = x, \forall x \in M$ (e semleges elem)

M3. (ha) $x * y = y * x, \forall x, y \in M$, akkor a monoid kommutatív.

Példák: 1. $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ kommutatív monoidok;
2. $(F(E), \circ)$ kommutatív monoid, ahol $F(E)$ az $f : E \to E$, (E nem üres) függvények halmaza, a "$\circ$" függvény összetétellel.

18.3 Gyűrűk

Az $(A, +, \cdot)$-t **gy űrűnek** nevezünk, ha:
Cs. $(A, +)$ Abel csoport
M. $(A, \cdot)$ monoid és
D. "$\cdot$" distributív a "$+$"-ra nézve,vagyis:
1) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
2) $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \forall x, y, z \in A$.
K. (ha) $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y \in A$, akkor a gyűrű kommutatív.
Példák:

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ egész számok gyűrűje ;

2. $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ Gauss egészek gyűrűje, ahol

$$\mathbb{Z}[i] = \{z = a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

3. $(\mathbb{R}_n, \oplus, \otimes)$ a maradékok gyűrűje modulo n;

4. $(M_n(A), +, \cdot)$ négyzetes mátrixok gyűrűje(melyek elemei az A-ból vannak);

5. $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ maradékosztályok gyűrűje modulo n.

Legyenek $(A, \perp, *)$ és $(A', \triangle, \circ)$ gyűrűk:

Értelmezés 18.2. *$f : A \rightarrow A'$-et **gyűrű izomorfizmusnak** nevezzük, ha f bijektív és*

$$f(x \perp y) = f(x) \triangle f(y),$$

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y),$$

$\forall x, y \in A$.

Értelmezés 18.3. *$(A, +, \cdot)$ egy **zérusosztó** mentes gyűrű, ha $x \neq 0$, $y \neq 0$ esetén $x \cdot y \neq 0$.*

Értelmezés 18.4. *Egy kommutatív zérusosztómentes gyűrű, melynek van legalább két eleme azt **integritási tartománynak** nevezzük.*

Értelmezés 18.5. *Ha $(A, +, \cdot)$ gyűrű, akkor*

$$(A[x], +, \cdot)$$

*az **A fölötti polinomgyűrűnek** nevezzük; $f \in A[x]$, $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ az algebrai formája egy x változós A beli együtthatókkal rendelkező polinomnak*
- ha $a_n \neq 0$, grad $f = n$, (a_n főegyüttható);
- ha $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, $f = 0$ null polinom, melynek foka $-\infty$.

Tulajdonságok:

1.) grad$(f + g) \leq max\{\text{grad } f, gradg\}$;

2.) grad$(f \cdot g) \leq$ grad$f +$ grad$g$.

3.) egy gyűrű **karakterisztikáján** azt a legkissebb n természetes számot értjük melyre $n \cdot 1 = 0$. Ha nem létezik ilyen természetes szám, akkor azt mondjuk, hogy a gyűrű karakterisztikája 0.

4.) **Mac Hale tétel:** Legyen $A, +, \cdot$ gyűrű. Ha létezik egy $f : (A, +) \rightarrow (A, +)$ morfizmus mely szürjektív és $\forall x \in A : x^2 - f(x) \in Z(A)$ akkor következik, hogy A kommutatív.($Z(A)$ a kommutáló elemek halmaza A-ban).

Tétel 18.23. *Ha A egy integritási tartomány, akkor $A[x]$ is integrtási tartomány és grad$(f \cdot g) =$ grad$f +$ grad$g$*
, $\forall f, g \in A[x]$.

18.4 Testek

Legyen $(K, +, \cdot)$ struktúra és

$$K \times K \rightarrow K, (x, y) \rightarrow x + y$$

,

$$K \times K \rightarrow K, (x, y) \rightarrow x \cdot y,$$