MATEMATIKA

GEOMETRIA ÉS MATEMATIKAI ANALÍZIS

A 2016-OS ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEINEK
MEGFELELŐ OKTATÁSI SEGÉDANYAG

A PUSKÁZÁS CSALÁSNAK MINŐSÜL.
A PUSKÁK VIZSGÁN TÖRTÉNŐ HASZNÁLATÁT NEM AJÁNLJUK!

Tartalomjegyzék

GEOMETRIA

MATEMATIKAI ANALÍZIS

1. Vektorok

1.1. Irányított szakaszok. Vektorok

Irányított szakaszok

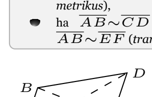
Értelmezés. Az (A, B) rendezett pontpárt **irányított szakasznak** nevezzük és így jelöljük: $\overline{AB}$.

Értelmezés. Az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ irányított szakaszokat **ekvipolenseknek** nevezzük (jelölés: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$), ha az $[AD]$ és $[BC]$ szakaszok felezőpontjai egybeesnek.

Megjegyzés. Ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, akkor az $\overline{AB}$ szakaszt párhuzamos eltolással a $\overline{CD}$ szakaszra lehet helyezni.

Tulajdonság. Az irányított szakaszok halmazán az ekvipolencia egy *ekvivalencia-reláció*, azaz

- $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ (*reflexív*),
- ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, akkor $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ (*szimmetrikus*),
- ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ és $\overline{CD} \sim \overline{EF}$, akkor $\overline{AB} \sim \overline{EF}$ (*tranzitív*).



$\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ pontosan akkor ekvipolensek, ha $ABDC$ egy paralelogramma vagy az A, B, C, D pontok kollineárisak és az $[AD]$, $[BC]$ felezőpontja megegyezik.

Vektorok

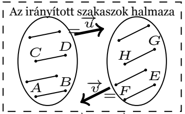
Értelmezés. Egy adott irányított szakasszal ekvipolens irányított szakaszok halmazát **vektornak** nevezzük.
Jelölés. Az $\overline{AB}$ irányított szakasz által meghatározott vektort $\overrightarrow{AB}$-vel (vagy egy kisbetűvel) jelöljük:

$$\overrightarrow{AB}=\left\{\overline{CD} \mid \overline{CD}\sim\overline{AB}\right\}.$$

Megjegyzés. Ha $\overline{AB}\sim\overline{CD}$, akkor $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Az $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ jelöléssel az $\overline{AB}$ (vagy a $\overline{CD}$) az $\overrightarrow{u}$ egy **reprezentánsa**.
Értelmezés. Az $\overrightarrow{u}$ **hossza (modulusza)** az őt reprezentáló irányított szakaszok közös hosszával egyenlő és $|\overrightarrow{u}|$-val jelöljük.

Értelmezés. A nulla hosszúságú $\overrightarrow{AA}$ vektort **nullvektornak** nevezzük.

Értelmezés. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok **egyenlőek** (jelölés: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$), ha az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ irányított szakaszok ekvipolensek.
Megjegyzés. Két vektor akkor egyenlő, ha irányuk megegyezik (tartóegyeneseik párhuzamosak), hosszuk egyenlő és ugyanaz az irányításuk.
Tétel. (*Adott kezdőpontú reprezentáns létezése*) Ha adott az $\overrightarrow{u}$ vektor és egy tetszőleges M pont, akkor létezik egyetlen olyan M' pont, amelyre $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{MM'}$.
Következmény. Az egyértelműség alapján, ha $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$, akkor $A=B$.



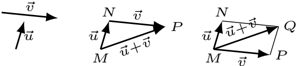
A mellékelt ábrán $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\ldots$, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{EF}=$ $=\overrightarrow{GH}=\ldots$, $\overline{CD}$ az $\overrightarrow{u}$ egy reprezentánsa, $\overline{EF}$ a $\overrightarrow{v}$ egy reprezentánsa, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

1.2. Műveletek vektorokkal

Vektorok összeadása

Az $\overrightarrow{u}$ és $\overrightarrow{v}$ vektorok **összegét** a következőképpen szerkesztjük meg.

- (*Háromszög-szabály*): egy tetszőleges M pontból kiindulva megszerkesztjük az $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{u}$ majd az $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{v}$ vektorokat. Ekkor az $\overrightarrow{u}$ és $\overrightarrow{v}$ összege az $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{MP}$ vektor.
- (*Paralelogramma-szabály*): ha $\vec{u}$ és $\vec{v}$ nem kollineárisak, egy tetszőleges M pontból kiindulva megszerkesztjük az $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{u}$ és az $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{v}$ vektorokat, majd az $MNQP$ paralelogrammát. Ekkor az $\overrightarrow{u}$ és $\overrightarrow{v}$ összege az $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{MQ}$ vektor.



Háromszög-szabály   Paralelogramma-szabály

A vektorok összeadásának tulajdonságai

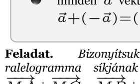
Értelmezés. Az $\overrightarrow{AB}$ vektor **ellentétes vektora** a $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ vektor.

Tulajdonság. A vektorok összeadásának tulajdonságai ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tetszőleges vektorok):

- *asszociatív*: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
- *kommutatív*: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
- a nullvektor $\left(\vec{0}\right)$ az összeadás *semleges eleme*: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;
- minden $\vec{a}$ vektornak van ellentettje $(-\vec{a})$: $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ paralelogramma síkjának bármely M pontja esetén* $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

M. Az $ABCD$ paralelogrammában $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$.

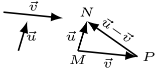


$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=$
$=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA})+$
$+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC})=$

$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}.$

Vektorok kivonása

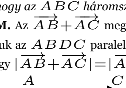
Az $\overrightarrow{u}$ és $\overrightarrow{v}$ vektorok **különbségén** az $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ vektort értjük és a következőképpen szerkesztjük meg: egy tetszőleges M pontból kiindulva felvesszük az $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{u}$ és $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{v}$ vektorokat. Ekkor $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{PN}$.



Tetszőleges M, N, P pontok esetén $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN}$.

Feladat. *Az ABC háromszögben az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ vektorok modulusza egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög derékszögű!*

M. Az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ megszerkesztése érdekében megrajzoljuk az $ABDC$ paralelogram-mát: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, így $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=AD$.



$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$, így $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|=CB$.

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|\Rightarrow AD=BC$, vagyis az $ABCD$ paralelogramma egy téglalap. Tehát $m(\widehat{BAC})=90^\circ$.

Vektor szorzása valós számmal

Legyen $\vec{u}$ egy vektor és α egy valós szám.

Értelmezés. Az $\vec{u} \neq \vec{0}$ vektornak az $\alpha \in \mathbb{R}^*$ számmal való szorzatán azt a $\alpha\vec{u}$-val jelölt vektort értjük, amely

- azonos állású $\vec{u}$-val;
- ha $\alpha > 0$, akkor azonos irányú, ha $\alpha < 0$, akkor ellentétes irányú $\vec{u}$-val;
- hossza $|\alpha| \cdot |\vec{u}|$-val egyenlő.

Ha $\vec{u} = \vec{0}$ vagy $\alpha = 0$, akkor $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Vektorok és valós számok szorzásának tulajdonságai

Tulajdonság. Tetszőleges $\vec{u}$, $\vec{v}$ vektorok és α, β valós számok esetén

- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;
- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;
- $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$;
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$;
- $(-\alpha)\vec{u} = \alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})$.

Feladat. *Legyen M a $[BC]$ felezőpontja és A egy tetszőleges pont a síkban. Igazoljuk, hogy* $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

M. A háromszög-szabály alapján

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \end{array}\right. \overset{\oplus}{\Rightarrow} 2\overrightarrow{AM} =$$

$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\underbrace{\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}}_{=\vec{0}}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

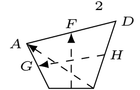
ahonnan $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Feladat. *Az E, F, G, H pontok az $ABCD$ négyszög $[BC]$, $[DA]$, $[AB]$ illetve $[CD]$ oldalainak a felezőpontjai. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{CA}$.*

M. G az $[AB]$ felezőpontja, így $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Hasonlóan, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{HD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.



$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG}=$
$=(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF})+$
$(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG})=$
$=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{EC}+$
$\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AG})=$

$$=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=$$

$$=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)=$$

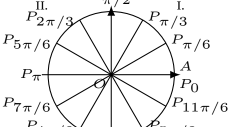
$$=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\cdot\vec{0}=\overrightarrow{CA}.$$

3. Trigonometria

3.1. A trigonometria elemei

Szög-mértékegységek

Értelmezés. Egy kör félkerületének és sugarának aránya állandó és $\pi \approx 3,1415$-tel egyenlő.
Értelmezés. A kör sugarával megegyező hosszúságú körívhez tartozó középponti szög mértéke 1 **radián**.
Megjegyzés. Egy szögnek fokban illetve radiánban való mértéke közt fennáll az $\dfrac{\alpha}{x_r} = \dfrac{180}{\pi}$ összefüggés, ahol α a szög fokban kifejezett, x_r a szög radiánban kifejezett mértéke.

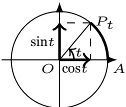


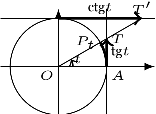
A trigonometrikus kör

Értelmezés. Adott egy xOy derékszögű koordinátarendszer. Az O középpontú, egységsugarú kört, amelyen kijelöltünk egy pozitív körbejárási irányt (az óramutató járásával ellentétes irányt), **trigonometrikus körnek** nevezzük.
Jelölés. Legyen $t \in \mathbb{R}$ egy szám. Ekkor egyetlen olyan P_t-vel jelölt pont van a trigonometriai körön, amely $m(\widehat{AOP_t}) = t$.

Szinusz és koszinusz

Legyen t egy valós szám és P_t a hozzátartozó pont a körön.
Értelmezés. A P_t pont ordinátáját a t valós szám **szinuszának** nevezzük és így jelöljük: $\sin t$.
Értelmezés. A P_t pont abszcisszáját a t valós szám **koszinuszának** nevezzük és így jelöljük: $\cos t$.





Tangens és kotangens

Értelmezés. Az $x=1$ egyenletű függőleges egyenest **tangens-tengelynek**, az $y=1$ egyenletű vízszintes egyenest pedig **kotangens-tengelynek** nevezzük.

Értelmezés. Ha $t\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, P_t a t-nek megfelelő pont és T az OP_t egyenes és a tangens-tengely metszéspontja, akkor T ordinátáját t **tangensének** nevezzük és így jelöljük: $\mathrm{tg}\,t$.

Értelmezés. Ha $t\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$, P_t a t-nek megfelelő pont és T' az OP_t egyenes és a kotangens-tengely metszéspontja, akkor T' abszcisszáját t **kotangensének** nevezzük és így jelöljük: $\mathrm{ctg}\,t$.

Fontosabb értékek

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\mid$
$\mathrm{ctg}\,x$	$\mid$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Fontosabb értékek

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\, x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\vert$

Visszavezetés az első negyedbe

$x \in C_2$	$x \in C_3$
$\sin x = \sin(\pi - x)$	$\sin x = -\sin(x - \pi)$
$\cos x = -\cos(\pi - x)$	$\cos x = -\cos(x - \pi)$
$\mathrm{tg}\, x = -\mathrm{tg}(\pi - x)$	$\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}(x - \pi)$
$\mathrm{ctg}\, x = -\mathrm{ctg}(\pi - x)$	$\mathrm{ctg}\, x = \mathrm{ctg}(x - \pi)$

$x \in C_4$
$\sin x = -\sin(2\pi - x)$
$\cos x = \cos(2\pi - x)$
$\mathrm{tg}\, x = -\mathrm{tg}(2\pi - x)$
$\mathrm{ctg}\, x = -\mathrm{ctg}(2\pi - x)$

1. Valós számok, valós számhalmazok

Értelmezés. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz **véges**, ha létezik egy n természetes szám és egy $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijektív függvény. **Értelmezés.** Az $A \subseteq \mathbb{R}$ hamaz **alulról korlátos**, ha létezik olyan $m \in \mathbb{R}$, amelyre $m \leq x$, $\forall x \in A$. Az m az A egy **alsó korlátja**.

Értelmezés. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ hamaz **felülről korlátos**, ha létezik olyan $M \in \mathbb{R}$, amelyre $M \geq x$, $\forall x \in A$. Az M az A egy **felső korlátja**.

Értelmezés. Ha $A \neq \emptyset$ alulról korlátos, akkor A alsó korlátai között van egy legnagyobb, melyet az A **alsó határának** vagy **infimumának** nevezünk és $h = \inf A$-val jelölünk.

Tétel. Legyen $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Egyenértékű a következő két állítás:

1. $h \in \mathbb{R}$ az A alsó határa;
2. $a \geq h$, $\forall a \in A$ és $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$, amelyre $a_\varepsilon < h + \varepsilon$.

Értelmezés. Ha $A \neq \emptyset$ felülről korlátos, akkor A felső korlátai között van egy legkisebb, melyet az A **felső határának** vagy **szuprémumának** nevezünk és $H = \sup A$-val jelölünk.

Tétel. Legyen $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Egyenértékű a következő két állítás:

1. $H \in \mathbb{R}$ az A felső határa;
2. $a \leq H$, $\forall a \in A$ és $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$, amelyre $a_\varepsilon > H - \varepsilon$.

Az $\mathbb{R}$ halmaz lezártja

Értelmezés. Ha az A halmaz alulról (felülről) nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy A alsó (felső) határa $-\infty$ $(+\infty)$. Az $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ halmazt az $\mathbb{R}$ **lezártjának** nevezzük.

Tulajdonság. Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon végzett „műveletek" tulajdonságai:

- $x+(+\infty)=(+\infty)+x=$
  $=(+\infty)+(+\infty)=+\infty, \forall x\in\mathbb{R};$
- $x-(+\infty)=-(+\infty)+x=$
  $x+(-\infty)=(-\infty)+(-\infty)=-\infty,$
  $\forall x\in\mathbb{R};$
- $x\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot x=$
  $\begin{cases}+\infty, \text{ha } x>0\\ -\infty, \text{ha } x<0\end{cases};$
- $\dfrac{x}{+\infty}=\dfrac{x}{-\infty}=0, \forall x\in\mathbb{R};$
- $\infty\cdot\infty=(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty,$
  $\infty\cdot(-\infty)=-\infty.$

Valós szám környezete

Értelmezés. Az x_0 valós szám **egy környezete** egy olyan halmaz, amely tartalmaz egy olyan nyílt intervallumot, amelynek eleme x_0. Egy ilyen halmazt $V(x_0)$-val jelölünk:

$V(x_0)$ környezete x_0-nak $\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0$
úgy, hogy $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\subseteq V(x_0)$.

Valós szám környezete - folytatás

Tulajdonság. Az x_0 valós szám környezeteinek tulajdonságai:

- az x_0 minden környezete tartalmazza x_0-t;
- ha V az x_0 egy környezete és $V \subseteq U$, akkor az U is egy környezete az x_0-nak;
- az x_0 két környezetének metszete szintén környezete x_0-nak;
- az x_0 egy tetszőleges V környezete esetén létezik az x_0 olyan U környezete úgy, hogy V az U minden pontjának is környezete.

Tétel. Ha $x \neq y$, akkor léteznek a V_x és V_y halmazok, V_x környezete x-nek, V_y környezete y-nak úgy, hogy $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Torlódási pont, izolált pont

Legyen $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ egy halmaz.

Értelmezés. Az $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ pontot az A halmaz **torlódási pontjának** nevezzük, ha az x_0 tetszőleges környezete az A halmaz végtelen sok elemét tartalmazza. Az A halmaz torlódási pontjainak halmazát A'-tel jelöljük.

Értelmezés. Ha $x_0 \in A$ és x_0 nem torlódási pontja A-nak, akkor x_0 az A egy **izolált pontja**.

Példa. Ha A véges, akkor A-nak nincs torlódási pontja, A minden pontja izolált pont. Az $A = (a, b)$ intervallum torlódási pontjainak halmaza $A' = [a, b]$.

4. Folytonos függvények

4.1. A folytonosság értelmezése

Értelmezés. Az $f: D \to \mathbb{R}$ függvény **folytonos** az $x_0 \in D$ pontban, ha az $f(x_0)$ bármely $V(f(x_0))$ környezetének megfelel az x_0 olyan $U(x_0)$ környezete, amelyre bármely $x \in D \cap V(x_0)$ esetén $f(x) \in V(f(x_0))$.

Tétel. Az $f: D \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csakis akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha x_0 a D izolált pontja vagy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Tétel. (*Heine-féle kritérium*) Az $f: D \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csakis akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha tetszőleges (x_n), $x_n \in D$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ sorozat esetén $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Tétel. Az $f: D \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csakis akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy $\forall x \in D$, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Értelmezés. Az $f: D \to \mathbb{R}$ függvény **folytonos** a D halmazon, ha f folytonos a D minden pontjában.

Tétel. Az elemi függvények folytonosak az értelmezési tartományuk nyílt intervallumain.

Feladat. *Igazojuk, hogy az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & \textit{ha } x\in\mathbb{Q} \\ x-2, & \textit{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ *függvény nem folytonos az* $x_0=3$ *pontban!*

M. Tekintsünk egy racionális elemekből álló (a_n) sorozatot, amelyre $a_n\to x_0$ és egy irracionális elemekből álló (b_n) sorozatot, amelyre $b_n\to x_0$.

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2-2a_n=3^2-2\cdot 3=3$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} b_n-2=3-2=1$. A Heine-féle kritérium alapján f nem folytonos $x_0=3$-ban.

Jobb és bal oldali folytonosság

Értelmezés. Az $f:D\to\mathbb{R}$ függvény **balról folytonos** az $x_0\in D$ pontban, ha x_0 a D izolált pontja vagy $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$.

Értelmezés. Az $f:D\to\mathbb{R}$ függvény **jobbról folytonos** az $x_0\in D$ pontban, ha x_0 a D izolált pontja vagy $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)$.

Szakadási pontok

Értelmezés. Ha az $f: D \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in D$ pontban nem folytonos, akkor f **szakadásos** az x_0 pontban és x_0 **szakadási pont**.

Értelmezés. Ha $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, de $l \neq f(x_0)$, akkor x_0 **megszüntethető szakadási pont**.

Értelmezés. Ha $\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_b \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_j \in \mathbb{R}$, de $l_b \neq l_j$, akkor x_0 **elsőfajú szakadási pont**.

Értelmezés. Minden más szakadási pont **másodfajú szakadási pont**.

Példa. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{ha } x < 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \\ x^2, & \text{ha } x \in (1,2) \\ x+1, & \text{ha } x \in [2,3] \\ \dfrac{1}{x-3}, & \text{ha } x \in (3,\infty) \end{cases}$$

f folyt. $(-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup (3,\infty)$-n.

$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = 1$, $f(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 = 1$ megszüntethető szakadási pont.

$\lim_{x \nearrow 2} f(x) = 4$, $\lim_{x \searrow 2} f(x) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 2$ elsőfajú szakadási pont.

$\lim_{x \nearrow 3} f(x) = 4$, $\lim_{x \searrow 3} f(x) = +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2=3$ másodfajú szakadási pont.

Feladat. *Tanulmányozzuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha } x<0\\ 1, & \text{ha } x=0\\ x^2-2x+2, & \text{ha } x>0\end{cases}$$ *függvény*

folytonosságát az $x_0=0$ pontban.

M. Megvizsgáljuk, hogy teljesül-e a $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)=$ $=\lim_{x\searrow x_0} f(x)=f(x_0)$ egyenlőségsor.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} x^2-2x+2=1\\ f(x_0)=f(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$l_b(x_0)=l_j(x_0)=f(x_0)\Rightarrow f$ folyt. x_0-ban.

Feladat. *Határozzuk meg az $a\in\mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy f folytonos legyen $\mathbb{R}$-n, ahol $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,*

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+x+a+1, & \text{ha } x<1\\ x^2+ax-2, & \text{ha } x\geq 1\end{cases}.$$

M. Az f folytonos a $(-\infty,1)$ és $(1,\infty)$ intervallumokon (az elemi függvények folytonosak), tehát csak $x_0=1$-ben kell vizsgálni a folytonosságot.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1} ax^2+x+a+1=2a+2\\ \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1} x^2+ax-2=a-1\\ f(x_0)=f(1)=a-1\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 2a+2=a-1\Rightarrow a=-3.$